EXERCICE N° 4 | 15' | 4 point

On donne les nombres complexes suivants : $u = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ et $v = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. (a) Ecrire u et v sous la forme exponentielle.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel pair n et tout entier naturel impair m on a : $u^{4n}+v^{3m} = 0$.
2. On pose $w = \dfrac{v}{u}$
   (a) Mettre w sous la forme algébrique.
   (b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{7\pi}{12})$ et$\sin(\dfrac{7\pi}{12})$.
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct ,on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = u, z_B = v$ et $z_C = (1-i)u + iv$.
   (a) Vérifier que $z_C - z_A = i(z_B - z_A)$
   (b) Montrer alors, que, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

EXERCICE N° 5 | 20' | 5 point

A chaque nombre complexe $z \neq -2i$ on associe le nombre complexe $z' = \dfrac{iz+1}{\overline{z}+2i}$

1. (a) On prend $Z = 1+2i$ calculer alors Z' et trouver sa forme exponentielle
   (b) Déterminer les nombres complexes tel que $Z' = i$
2. M, A et B sont les points d'affixes respectives Z, i et $2i$ Montrer qu'on ait :$|iZ+1| = MA$ et $|\overline{Z}+2i| = MB$ En déduire l'ensemble $E = \{M(Z)\text{tel que}|Z'| = 1\}$.
3. On suppose que $Z = \tan\theta + 2i$ où $\theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$
   . Chercher en fonction de θ le module et argument de Z'.

EXERCICE N° 6 | 20' | 5 point

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit Z un nombre complexe tel que $Re(Z) = 1$ et $arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$ avec $\theta \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

1. (a) Montrer que $Im(Z) = \tan\theta$
   (b) Exprimer module de Z en fonction de $\cos\theta$.
2. On considère le nombre complexe Z' tel que $Z' = \dfrac{2i}{Z-1}$
   (a) Déterminer les valeurs de θ pour les quelles Z' est défini.
   (b) Déterminer en fonction de de θ le module et un argument de Z'.
3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1, Z$ et Z'.
   (a) Montrer que $\dfrac{Z-1}{Z'-1}$ est imaginaire non nul.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.

Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn